28/3/19

Φυλλάδιο ① Συνέχεια...

⑧ Έστω (X,ρ) μ.χ. $x_1, \dots, x_n$ διαφορετικά ανά 2 στοιχεία του X. Ν.δ.ο υπάρχουν $V_1, \dots, V_n$ ξένα ανά δύο ανοιχτά σύνολα ώστε $x_i \in V_i$ $i=1,\dots,n$

Λύση: Θέτουμε $\varepsilon = \frac{1}{2}\min\{\rho(x_i,x_j) : i,j \in \{1,\dots,n\}\ i \neq j\}$ τότε $\varepsilon > 0$. Θέτουμε $V_i = B_\rho(x_i,\varepsilon)$ $i=1,\dots,n$. Τα V_i, $i=1,\dots,n$ είναι ανοιχτά σύνολα (ως ανοιχτές μπάλες), $x_i \in V_i$, $i=1,\dots,n$. Δείχνουμε ότι τα V_i είναι ξένα ανά δύο. Έστω $i,j \in \{1,\dots,n\}$ $i \neq j$. Τότε $0 < \varepsilon \leq \frac{\rho(x_i,x_j)}{2}$. Θα δ.ο. $V_i \cap V_j = \emptyset$ δηλ.

$B_\rho(x_i,\varepsilon) \cap B_\rho(x_j,\varepsilon) = \emptyset$. Υποθέτουμε ότι: $B_\rho(x_i,\varepsilon) \cap B_\rho(x_j,\varepsilon) \neq \emptyset$, τότε υπάρχει $y \in B_\rho(x_i,\varepsilon) \cap B_\rho(x_j,\varepsilon)$

τότε: $\begin{cases} \rho(y,x_i) < \varepsilon \\ \rho(y,x_j) < \varepsilon \end{cases}$, $\rho(x_i,x_j) \leq \rho(x_i,y) + \rho(y,x_j) <$

$< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = 2\frac{\rho(x_i,x_j)}{2} = \rho(x_i,x_j)$

δηλ. $\rho(x_i,x_j) < \rho(x_i,x_j)$ άτοπο. Άρα $V_i \cap V_j = \emptyset$

⑨ (X,ρ) μ.χ. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολ. στο X, $x\in X$

α) Αν $x_n \overset{\rho}{\not\to} x$ τότε $\exists\, \varepsilon>0$ και υπακ. $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε: $\rho(x_{k_n},x)\geq\varepsilon$ $\forall n\in\mathbb{N}$

β) $x_n \overset{\rho}{\to} x \Leftrightarrow$ κάθε υπακ. της (x_n) έχει περαιτέρω υπακ. που συγκλίνει στο x.

Λύση: Υπενθύμιση: $x_n \overset{\rho}{\to} x \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists\, n_0\in\mathbb{N}:$ $\forall n\ (n\geq n_0 \Rightarrow \rho(x_n,x)<\varepsilon)$

α)

$x_n \overset{\rho}{\not\to} x \Leftrightarrow \exists\,\varepsilon>0$ (*) $\forall m\in\mathbb{N}\ \exists n\ (n\geq m$ και $\rho(x_n,x)\geq\varepsilon)$

Συνεπώς αν $x_n \overset{\rho}{\not\to} x$, $\exists\,\varepsilon>0$ ώστε

Από την (*) για $m=1$ $\exists\, k_1\geq 1$ $\rho(x_{k_1},x)\geq\varepsilon$

-//- $m=k_1+1$ $\exists\, k_2\geq k_1+1$ ώστε:

δηλ. $k_2>k_1$

$\rho(x_{k_2},x)\geq\varepsilon$

Από την (*) για $m=k_2+1$ $\exists\, k_3\geq k_2+1$

(δηλ. $k_3>k_2$)

Αν $k_1<\ldots<k_n$ έχουν επιλεγεί από την (*) υπάρχει $k_{n+1}\geq k_n+1$ ώστε: $\rho(x_{k_{n+1}},x)\geq\varepsilon$

(δηλ. $k_{n+1}>k_n$)

Με αυτή την επαγωγική διαδικασία επιλέχθηκαν γνήσιοι αριθμοί $k_1<k_2<\ldots<$ ώστε:

$\boxed{\rho(x_{k_n},x)\geq\varepsilon}^{(1)}$ $\forall n$. Η υπακολουθία $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ έχει τη ζητούμενη ιδιότητα.

β) $(\Rightarrow)$ Αν $x_n \overset{\rho}{\to} x$ και $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ υπακολ. της (x_n) τότε η ίδια η (x_{k_n}) είναι υπακολουθία του εαυτού της και συγκλίνει στο x.

$(\Leftarrow)$ Υποθέτουμε ότι ισχύει η υπόθεση και $x_n \overset{\rho}{\not\to} x$

(Απαγωγή σε άτοπο)

Τότε από το α) ερώτημα $\exists\, \varepsilon>0$ και υπακολουθία $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ της (x_n) ώστε: $\rho(x_{k_n},x)\geq\varepsilon$ $\forall n\in\mathbb{N}$.
Από την υπόθεση μας υπάρχει μια υπακολουθία $(x_{k_{\lambda_n}})_{n\in\mathbb{N}}$ της $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ με $x_{k_{\lambda_n}}\xrightarrow{\rho} x$

Από τον ορισμό για το παραπάνω ε υπάρχει n_0 ώστε: $\rho(x_{k_{\lambda_n}},x)<\varepsilon$ $\forall n\geq n_0$ άτοπο από την (1)

Επομένως $x_n\xrightarrow{\rho} x$

(10) Έστω (X,ρ), (Y,d) δυο μ.χ., $f:X\to Y$ μια συνάρτηση και $x\in X$. Αν για κάθε ακολ. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο X με $x_n\xrightarrow{\rho} x$ η $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα ακολουθία στον (Y,d) τότε η f είναι συνεχής στο x.

Λύση: Από τη θεωρία γνωρίζουμε (αρχή μεταφοράς) ότι η f είναι συνεχής στο $x \Leftrightarrow$ για κάθε ακολ. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο X με $x_n\xrightarrow{\rho} x$ ισχύει $f(x_n)\xrightarrow{d} f(x)$

Υποθέτουμε (προς απαγωγή σε άτοπο) ότι η f δεν είναι συνεχής στο x. Τότε υπάρχει μια ακολουθία $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο X με $y_n\xrightarrow{\rho} x$ και $f(y_n)\not\to f(x)$

Όμως από υπόθεση, εφόσον $y_n\xrightarrow{\rho} x$ η $(f(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα ακολουθία στον (Y,d) δηλ. $\exists\, w\in Y$ $f(y_n)\xrightarrow{d} w$ [Από τα παραπάνω $w\neq f(x)$]
Θεωρούμε την ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο X που ορίζεται ως εξής:
$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, \ldots)$
$\quad\;\; \|$
$(x\;\; y_1\;\; x\;\; y_2\;\; x\;\; y_3 \ldots)$

Δηλ. $x_n = \begin{cases} x & \text{, αν } n \text{ περιττός} \\ y_{\frac{n}{2}} & \text{, αν } n \text{ άρτιο} \end{cases}$

(Δηλ. $x_{2n-1} = x$ και $x_{2n} = y_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$)

Τότε: $\left.\begin{aligned} x_{2n-1} &= x \xrightarrow{\rho} x \\ x_{2n} &= y_n \xrightarrow{\rho} x \end{aligned}\right\} \Rightarrow$ Συμπεραίνουμε ότι: $x_n \xrightarrow{\rho} x$

Και άρα από την υπόθεση η $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα στο (Y, d) δηλ. $\exists z \in Y$: $f(x_n) \xrightarrow{d} z$, τότε: $f(x_{2n}) \xrightarrow{d} z$
$f(x_{2n-1}) \xrightarrow{d} z$

Όμως $f(x_{2n}) = f(y_n) \xrightarrow{d} w$ άρα $w = z$
$f(x_{2n-1}) = f(x) \xrightarrow{d} f(x)$ και $z = f(x)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\underline{f(x) = x}$ $\underline{\text{άτοπο}}$

Επομένως η f είναι συνεχής στο x.

Πυκνά σύνολα, διαχωρίσιμοι μετρικοί χώροι

Ορισμός: Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος ένα $D \subseteq X$ λέγεται πυκνό (στο X) αν $\overline{D} = X$

Παραδείγματα: α) Στον $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική τα $\mathbb{Q}$ και $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ είναι πυκνά.

β) Στον $\mathbb{R}^2$ με την Ευκλείδεια μετρική το $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ είναι πυκνό. Επίσης τα σύνολα:

$(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) \times (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$, $\mathbb{Q} \times (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$, $(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) \times \mathbb{Q}$ είναι πυκνά.

Παρατήρηση Αν το D είναι πυκνό στο (X,ρ) και $Z \subseteq X$ με $D \subseteq Z$ τότε το Z είναι πυκνό.

Πρόταση Έστω (X,ρ) μ.χ. και $D \subseteq X$. Τ.Α.Ε.Ι.
(i) D : πυκνό
(ii) Για μη ανοικτό σύνολο G ισχύει $G \cap D \neq \emptyset$
(iii) Για κάθε $x \in X$ υπάρχει μια ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο D με $x_n \xrightarrow{\rho} x$

Ορισμός Ένας μετρικός χώρος (X,ρ) λέγεται διαχωρίσιμος αν υπάρχει $D \subseteq X$ ώστε D αριθμήσιμο και πυκνό.

Σημείωση Ένα σύνολο λέγεται αριθμήσιμο αν είναι πεπερασμένο ή ισοπληθικό με το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών.

Παραδείγματα α) Αν (X,ρ) μ.χ. και το X είναι αριθμήσιμο τότε προφανώς ο (X,ρ) είναι διαχωρίσιμος. $(D = X)$

β) Ο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική είναι διαχωρίσιμος (αφού το $\mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο του)

γ) Ο $\mathbb{R}^2$ με την ευκλείδεια μετρική είναι διαχωρίσιμ[ος] αφού το $\mathbb{Q}^2 = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο του.

δ) Γενικότερα για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ο $\mathbb{R}^k$ εφοδιασμένος με τη μετρική ρ_p $1 \leq p \leq \infty$ είναι διαχωρίσιμος διότι το $\mathbb{Q}^k$ είναι αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο του.

Ορισμός: Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Μια οικογένεια $\mathcal{B}$ ανοικτών υποσυνόλων του X λέγεται βάση για τα ανοικτά σύνολα του X ή βάση για την τοπολογία του X αν για κάθε $G \subseteq X$ ανοικτό υπάρχει οικογένεια συνόλων $(B_i)_{i \in I}$ στη $\mathcal{B}$ ώστε $G = \bigcup_{i \in I} B_i$

Παράδειγμα: Αν (X, ρ) η οικογένεια συνόλων $\{B_\rho(x, \varepsilon)\ x \in X,\ \varepsilon > 0\}$ είναι μια βάση για την τοπολογία του X

Αποδ: Πράγματι για κάθε ανοικτό σύνολο G τότε $\forall x \in G$ $\exists \varepsilon_x$ $B_\rho(x, \varepsilon_x) \subseteq G$ τότε: $G = \bigcup_{x \in G} B_\rho(x, \varepsilon_x)$

Παρατήρηση: Έστω (X, ρ) μ.χ. $\mathcal{B}$ μια οικογένεια υποσυνόλων του X. Τ.Α.Ε.Ι.
(1) Η $\mathcal{B}$ είναι βάση για την τοπολογία του X
(2) Η G είναι ανοικτό $\forall x \in G$: $\exists B \in \mathcal{B}$ ώστε $x \in B \subseteq G$

Αποδ: (1) $\Rightarrow$ (2) Έστω G ανοικτό υποσ. του X και $x \in G$. Από υπόθεση (1) υπάρχει $(B_i)_{i \in I}$ οικογένεια συνόλων της $\mathcal{B}$ ώστε $G = \bigcup_{i \in I} B_i$

Τότε $\exists\, i_0 \in I$ $x \in B_{i_0}$ τ.ω. $x \in B_{i_0} \subseteq G$

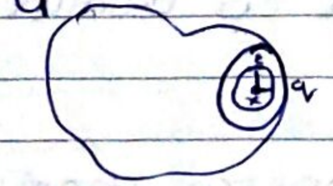
(2) $\Rightarrow$ (1) Έστω G ανοικτό υποσ. του X. Από υπόθεση (2) $\forall x \in G$ υπάρχει $B_x \in \mathcal{B}$ ώστε $x \in B_x \subseteq G$ τότε: $G = \bigcup_{x \in X} B_x$

Θεώρημα: Έστω (X,ρ) μ.χ. Τ.Α.Ε.Ι

(1) Ο X είναι διαχωρίσιμος

(2) Υπάρχει μια αριθμήσιμη βάση $\mathcal{B}$ για τα ανοικτά υποσύνολα του X

Αποδ: (1) $\Rightarrow$ (2) Έστω D αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο του X. Θέτουμε $\mathcal{B} = \{B_\rho(y,q) \; y \in D \; q \in \mathbb{Q}^+\}$
Η $\mathcal{B}$ είναι αριθμήσιμη (αφού D, $\mathbb{Q}^+$ αριθμήσιμα άρα $D \times \mathbb{Q}^+$ αριθμ) και αποτελείται από ανοικτά υποσύνολα του X.
Δείχνουμε τώρα ότι η ~~B~~ $\mathcal{B}$ είναι βάση για την τοπολογία του X.
Έστω G ανοικτό και $x \in G$, τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $B_\rho(x,\varepsilon) \subseteq G$. Επιλέγουμε $q \in \mathbb{Q}$ με $0 < q < \frac{\varepsilon}{2}$



Εφόσον D πυκνό και $B_\rho(x,q)$ είναι ανοικτό μη κενό $D \cap B_\rho(x,q) \neq \emptyset$
Επιλέγουμε $y \in D \cap B_\rho(x,q)$ τότε $y \in D$ και $\rho(y,x) < q < \frac{\varepsilon}{2}$

Ισχυρισμός $B_\rho(y,q) \subseteq G$

Αποδ: Έστω $z \in B_\rho(y,q)$ τότε $\rho(y,z) < q < \varepsilon/2$

Άρα $\rho(z,x) \leq \rho(z,y) + \rho(y,x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Άρα $z \in B_\rho(x,\varepsilon) \subseteq G$

Έτσι $x \in \underbrace{B_\rho(y,q)}_{\in \mathcal{B}} \subseteq G$

(2) ⇒ (1) Υποθέτουμε ότι η $\mathcal{B}$ είναι αριθμήσιμη.
Για κάθε μη κενό $B \in \mathcal{B}$ επιλέγουμε $x_B \in B$
Θέτουμε $D = \{x_B : B \in \mathcal{B} \ B \neq \emptyset\}$, τότε
D : αριθμήσιμο.

Επίσης, D : πυκνό
Αποδ: Έστω G ανοικτό, μη κενό. Τότε $\exists x \in G$
Αφού η $\mathcal{B}$ είναι βάση για την τοπολογία
$\exists B \in \mathcal{B}$ ~~...~~ $x \in B \subseteq G$ τότε $x_B \in D \cap G$
Άρα $D \cap G \neq \emptyset$

Πόρισμα: Αν (X,ρ) διαχωρίσιμος μ.χ. και $A \subseteq X$.
Τότε (A, ρ_A) είναι επίσης διαχωρίσιμος

Αποδ: Από το προηγούμενο θεώρημα υπάρχει,
αφού ο (X,ρ) είναι διαχωρίσιμος, μια
~~ανοικτή~~ αριθμήσιμη βάση $\mathcal{B}$ για το ανοικτό
υποσύνολο του X.
Ορίζουμε $\mathcal{B}' = \{B \cap A : B \in \mathcal{B}\}$
Η $\mathcal{B}'$ αποτελείται από σχετικά ανοικτά υποσύνολα
στο A, άρα είναι αριθμήσιμη.

Η $\mathcal{B}'$ είναι βάση για τα ανοικτά του (A, ρ_A)
Πράγματι αν V ανοικτό στο A και $x \in V$
τότε $\exists G$ ανοικτό στο X $V = G \cap A$
Εφόσον $\mathcal{B}$ βάση για τα ανοικτά στο X και
$x \in G$ $\exists B \in \mathcal{B}$ $x \in B \subseteq G$.

τότε $x \in \underbrace{B \cap A}_{\in \mathcal{B}} \subseteq G \cap A$ Από το προηγούμενο θεώρημα ο (A, ρ_A) είναι διαχωρίσιμος.

Θεώρημα: Κάθε ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ γράφεται ως αριθμήσιμη ένωση ξένων ανά δύο ανοιχτών διαστημάτων.

Απόδ: Έστω G ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Τότε για κάθε $x \in G$ υπάρχει $\varepsilon > 0$ $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq G$.
Για κάθε $x \in G$ ορίζουμε:
$b_x = \sup\{t \in \mathbb{R}\ t > x : [x,t) \subseteq G\}$

$a_x = \inf\{t \in \mathbb{R}\ t < x : (t, x] \subseteq G\}$

Παρατηρούμε ότι το b_x είναι καλά ορισμένο αφού το σύνολο του οποίου πήραμε το supremum είναι μη-κενό.
Αν το σύνολο $\{t \in \mathbb{R}\ t > x\ [x,t) \subseteq G\}$ τότε:
$b_x = +\infty$. Ομοίως το a_x είναι καλά ορισμένο ενώ ενδέχεται $a_x = -\infty$

Ισχυρισμός: $[x, b_x) \subseteq G$.
Απόδ: Έστω $y \in [x, b_x)$. Αφού $b_x = \sup\{\dots\}$
$\exists\, t \in \{\dots\}$ με $t > y$ τότε: $[x,t) \subseteq G$ και $y \in [x,t)$ άρα $y \in G$

Ισχυρισμός: $(a_x, x] \subseteq G$ (ομοίως)

$b_x \notin G$
Απόδ: Αν $b_x \in G$ $\exists\, \delta > 0 : (b_x - \delta, b_x + \delta) \subseteq G$, τότε εφόσον $[x, b_x) \subseteq G$ προκύπτει $[x, b_x + \delta) \subseteq G$

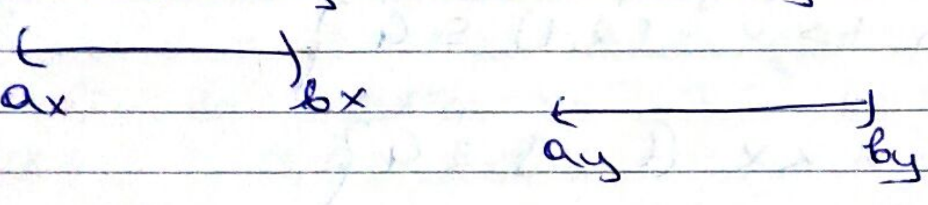
άτοπο διότι $b_x + \delta > b_x = \sup\{ \dots \}$

$a_x \notin G$ (ομοίως)

Έστω $G = \bigcup_{x \in G} (a_x, b_x)$

Ισχυρισμός: Αν $x, y \in G$ είτε $(a_x, b_x) = (a_y, b_y)$
ή $(a_x, b_x) \cap (a_y, b_y) = \emptyset$

Απόδ: Αν $(a_x, b_x) \cap (a_y, b_y) \neq \emptyset$. Θα δ.ο.
$a_x = a_y$ και $b_x = b_y$



Αν $a_x \neq a_y$ τότε $a_x < a_y$ ή $a_y < a_x$. Στην πρώτη περίπτωση $a_y \in (a_x, b_x) \subseteq G$ άτοπο

Στη 2η περ. $a_y \in G$ άτοπο

Έτσι το G γράφεται ως ένωση ξένων ανά δύο συνόλων της μορφής (a_x, b_x)

$G = \bigcup_{x \in I} (a_x, b_x)$ με τα σύνολα $\{(a_x, b_x)\ x \in I\}$ είναι ξένα ανά δύο.

Κάθε τέτοιο σύνολο περιέχει ένα ρητό q_x
$f: I \to \mathbb{Q}$
$x \to q_x$ είναι 1-1 άρα αφού το $\mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο και το I είναι αριθμήσιμο